

VSP

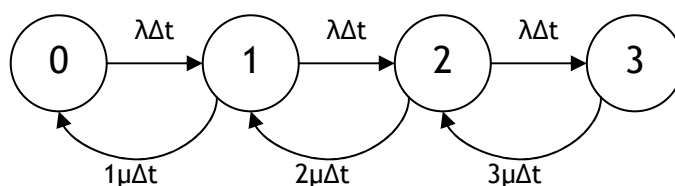
SHO – příklad č. 7, telefonní ústředna

Martin Chlupáč, A01110, 28. 9. 1981
mail@fredfred.net
1. 11. 2005

Zadání

Telefonní ústředna je modelována systémem M/M/3 s nulovou délkou fronty (tj. pokud jsou obsazeny všechny (tři) linky, volající nečeká - zavěsí). Průměrná doba trvání hovoru je 5 min a průměrný počet požadavků na spojení je 20/hod. Z modelu určete pravděpodobnost obsazení ústředny (tj. stavu kdy všechny linky jsou obsazené) a pravděpodobnost, že požadavek na spojení bude uspokojen (tj. alespoň jedna linka je volná).

Graf přechodů



Zadanou ústřednu lze jako model vyjádřit prostřednictvím čtyř stavů a přechodů mezi nimi. Číselná označení jednotlivých stavů odpovídají počtu právě obsazených linek.

Přechody ze stavu i do stavu $i+1$ jsou popsány shodnou *střední frekvencí příchodu požadavků* λ (v našem případě **20/hod**). V opačném směru, z i do $i-1$, již nelze přechody popsat takto jednoduše neboť pravděpodobnost přechodu do „nižšího“ stavu, tedy ukončení jednoho z hovorů, roste s počtem hovorů současně uskutečňovaných. To lze vyjádřit hodnotou $i\mu$, kde μ je v našem případě **12/hod** ($\mu = 1/T_s$ a T_s je dle zadání 5 minut).

U každého stavu můžeme ještě uvést smyčku z i do i , kterou by bylo lze popsat výrazem: $1 - (i\mu + \lambda)\Delta t$, což je zjevné, ale pro naši úlohu nepodstatné a tak ji v grafu neuvádím.

Rovnice

Úloha je definována *Erlangovou soustavou diferenciálních rovnic*:

$$dp_0(t)/dt = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu p_1(t)$$

$$dp_k(t)/dt = \lambda \cdot p_{k-1}(t) - (\lambda + k \cdot \mu) \cdot p_k(t) + (k+1) \cdot p_{k+1}(t)$$

$$\text{pro } k = 1 \dots n-1$$

$$dp_n(t)/dt = \lambda \cdot p_{n-1}(t) - n\mu \cdot p_n(t)$$

Jelikož nás zajímá systém ve *stacionárním režimu* nebudeme se dále zabývat řešením této soustavy, ale použijeme soustavu algebraických rovnic vzniklých z diferenciálních položením levé strany rovné nule. Tuto soustavu je však třeba doplnit o podmínku, že součet všech pravděpodobností výskytů v jednotlivých stavech je roven 1.

Řešení takové soustavy je triviální, ale pro úsporu času a místa rovnou použijeme, z ní odvozený, *Erlangův vzorec*: $p_k = \psi^k/k! \cdot p_0$, kde $\psi = \lambda/\mu$.

Vztah pro p_0 odvodíme z Erlangova vzorce a z podmínky pro celkový součet pravděpodobností a tedy: $p_0 = (\sum \psi^k / k!)^{-1}$

Výsledky

Nejprve je třeba ověřit, zda se systém vůbec může dostat do stacionárního režimu. Tomu odpovídá podmínka, aby *zatížení* ρ bylo menší než 1, přičemž $\rho = \lambda / n\mu$, po dosazení **$\rho = 0,55$** . Systém tedy stacionárního režimu dosáhne.

Dosazením konkrétních čísel spočítáme pravděpodobnosti výskytu systému v jednotlivých stavech jak ukazuje následující tabulka.

stav	teor. ppst výskytu v daném stavu	ppst výskytu získaná simulací
0	20,716%	20,7161%
1	34,527%	34,5269%
2	28,772%	28,7724%
3	15,985%	15,9847%

Pro simulaci v programu **Markov** jsem použil tento popis systému:

```
module TlfUstredna[20];
#define pocet 4
#define mUp 20
#define mDown 12

for (i ;0; pocet-2){
    [i]->mUp [i+1];
}

for (i; 0; pocet-2){
    [i+1]->(mDown*(i+1)) [i];
}
```

Pravděpodobnost obsazení ústředny (tj. stavu, kdy všechny linky jsou obsazené) odpovídá pravděpodobnosti výskytu systému ve stavu číslo tři, což je **15,985%**.

Naopak, pravděpodobnost, že požadavek na spojení bude uspokojen (tj. alespoň jedna linka je volná) je rovna **$100 - 15,985 = 84,015\%$** , neboť požadavek bude uspokojen pokud se ústředna nachází v kterémkoli stavu, vyjma stavu třetího.